Всеукраїнська олімпіада
Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна
з математики, другий тур
Завдання і розв'язки

1. Розв'яжіть рівняння

$$\log_x 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 = 3.$$

Відповідь: 2.

Розв'язок. Скориставшись рівністю $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, перепишемо рівняння з умови у такому вигляді:

$$\log_x 3 \cdot \frac{\log_x 4}{\log_x 3} \cdot \frac{\log_x 5}{\log_x 4} \cdot \frac{\log_x 6}{\log_x 5} \cdot \frac{\log_x 7}{\log_x 6} \cdot \frac{\log_x 8}{\log_x 7} = 3 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \log_x 8 = 3,$$

звідки отримуємо $x = 2$.

2. У магазині одночасно діють дві знижки на вибір: знижка 65% на кожну другу покупку або 80% на кожну третю. Також у магазині лежать безкоштовні пакетики. Все, що знаходиться в одному пакетику, вважається однією покупкою. Василь хоче купити 5 шоколадок вартістю 100 гривень кожна. Яку найменшу суму грошей він може витратити? (Покупець сам обирає вид акції, а також сам обирає, що класти у пакетики і в якому порядку робити покупки.) Відповідь обґрунтуйте.

Примітка: знижка 65% на товар означає, що покупець сплачує 35% вартості товару.

Для пояснення умови задачі наведемо приклад. Для покупки трьох шоколадок є такі варіанти: (1) покласти кожну шоколадку в окремий пакетик; тоді знижка буде лише на другу шоколадку (65%) або лише на третю (80%) (покупець сам обирає вид акції); (2) покласти їх у два пакетики: з одною і з двома шоколадками; знижка буде на другу покупку (65%), а саме, у залежності від порядку пакетиків – на одну шоколадку або на дві шоколадки (покупець сам обирає порядок пакетиків); (3) покласти їх в один пакетик, тоді знижки не буде зовсім.

Відповідь: 240 гривень.

Розв'язок. Якщо шоколадка потрапляє у «другу» покупку, вона коштує 35 гривень, а якщо вона потрапляє у «третю» покупку, то коштує 20 гривень.

Нехай Василь обирає варіант знижки «65% на кожну другу покупку». Щоб скористатися цією знижкою, йому потрібні хоча б дві покупки. Це означає, що мають бути перша і друга покупки (і, можливо, подальші). У першу покупку потрапить щонайменше одна шоколадка, і на неї знижка діяти не буде. Отже, під знижку потраплять не більше ніж чотири шоколадки. При цьому чотири шоколадки дійсно *можуть* потрапити під знижку: у варіанті $1 + 4$. Така покупка зі знижкою коштує $100+4\cdot 35 = 240$ гривень. (Очевидно, що якщо під знижку попадуть менше чотирьох шоколадок, покупка коштуватиме більше.)

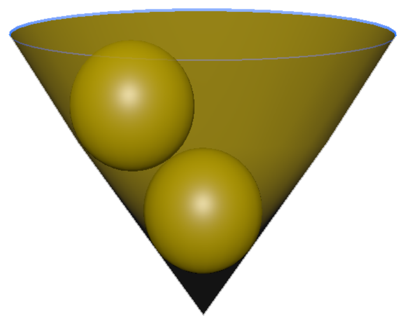
Нехай Василь обирає варіант знижки «80% на кожну третю покупку». Щоб скористатися цією знижкою, йому потрібні хоча б три покупки. Це означає, що мають бути перша, друга і третя покупки (і, можливо, подальші). У першу і другу покупки разом потраплять щонайменше дві шоколадки, і на них знижка діяти не буде.

Отже, під знижку потраплять не більше ніж три шоколадки. При цьому три шоколадки дійсно *можуть* потрапити під знижку: у варіанті $1+1+3$. Така покупка зі знижкою коштує $200+3\cdot 20=260$ гривень. (Очевидно, що якщо під знижку попадуть менше трьох шоколадок, покупка коштуватиме більше.)

Таким чином, мінімальна вартість покупки зі знижкою – 240 гривень.

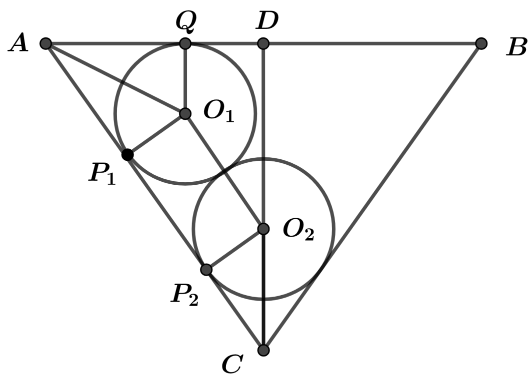
Примітка. Правильним є і такий розв'язок: переберемо всі можливі варіанти розподілу 5 шоколадок по пакетиках і всі можливі варіанти застосування знижок і знайдемо варіант з найменшою вартістю. В такому розв'язку важливо не пропустити якісь випадки.

3. Посудина має форму прямого кругового конуса висотою 10 см з площею основи 100π см^2. Її розташували вершиною донизу так, що висота напрямлена вздовж вертикальної прямої, і поклали всередину дві однакові кулі, як схематично зображено на малюнку (кулі лежать нерухомо; вони торкаються одна одної і кожна куля торкається посудини). Виявилося, що верхня куля торкається основи конусу. Знайдіть радіус куль. Відповідь обґрунтуйте. (Товщиною стінок посудини знехтуйте.)



Відповідь: $\frac{10}{1+2\sqrt{2}}$ см (те саме число можна записати як $\frac{10\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}$ або $\frac{20\sqrt{2}-10}{7}$ тощо).

Перший розв'язок. Проведемо площину через вісь конуса і центр верхньої кулі. Очевидно, центр нижньої кулі лежить на осі конуса, тобто теж належить площині, що розглядається. Точки дотику верхньої кулі з бічною поверхнею конуса і з основою конуса теж належать цій площині. (Це можна довести з міркувань симетрії. Дійсно, фігура, що складається з конуса і двох куль, є симетричною відносно розглянутої площини. Але є тільки одна точка дотику верхньої кулі з бічною поверхнею конуса, а отже, вона має належати цій площині. Аналогічними є міркування щодо точки дотику верхньої кулі з основою конуса.) Таким чином, у перерізі маємо рівнобедрений трикутник і два кола, які дотикаються одне одного: одне з них дотикається бічних сторін трикутника, а друге – бічної сторони і основи.



Нехай O_1 і O_2 – центри верхньої і нижньої куль відповідно, C – вершина конуса, трикутник ABC – переріз конуса побудованою площиною (причому точка A ближча до O_1), D – точка перетину висоти конуса і основи, Q – точка дотику верхньої кулі і основи конуса, а P_1 і P_2 – точки дотику конуса і верхньої і нижньої куль відповідно, що лежать у побудованій площині. Позначимо $h=DC$ (висота конуса), $R=AD$

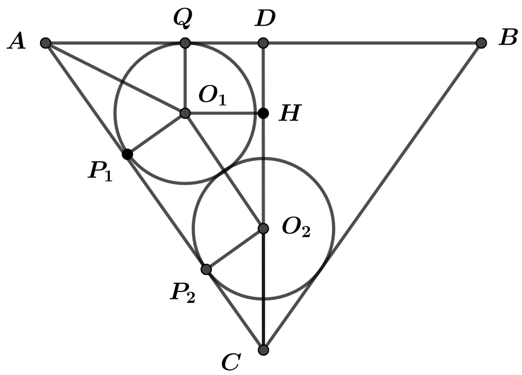
(радіус основи), $\alpha = \angle O_1AP_1$, $\beta = \angle O_2CP_2$ і нехай r – радіус куль. Тоді

$$AC = \sqrt{h^2 + R^2} = AP_1 + P_1P_2 + P_2C = r\operatorname{ctg}\alpha + 2r + r\operatorname{ctg}\beta = r(\operatorname{ctg}\alpha + 2 + \operatorname{ctg}\beta).$$

За умовою, $h = 10$, а площа основи дорівнює $\pi R^2 = 100\pi$, отже, $R = 10$. Тобто трикутник ADC прямокутний рівнобедрений, отже, $\alpha = \angle O_1AP_1 = 45°$ і $\angle QAP_1 = 45°$. Оскільки трикутники AQO_1 і AP_1O_1 рівні, то $\beta = \frac{1}{2}\angle O_1AP_1 = 22.5°$. Отже, $\operatorname{ctg}\alpha = 1$, $\operatorname{ctg}\beta = \sqrt{2} + 1$ (можна скористатися формулою котангенса половинного кута). Крім того, $AC = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$. Таким чином,

$$10\sqrt{2} = r(4 + \sqrt{2}) \ \Leftrightarrow\ r = \frac{10\sqrt{2}}{4 + \sqrt{2}}.$$

Другий розв'язок. Виділивши переріз конуса, можна далі міркувати так. За умовою, $h = 10$, а площа основи дорівнює $\pi R^2 = 100\pi$, отже, $R = 10$. Тобто трикутник ADC прямокутний рівнобедрений, отже, $\angle DCA = 45°$. Виразимо h через радіус куль r. Для цього опустимо перпендикуляр O_1H на DC і знайдемо DH, HO_2 і O_2C.



За побудовою, $QDHO_1$ – прямокутник, отже $DH = r$.

Трикутник O_2P_2C прямокутний з кутом $\angle O_2P_2C = 45°$, тобто $O_2P_2 = P_2C = r$ і, за теоремою Піфагора, $O_2C = \sqrt{2}r$.

Сторона AC дотикається обох кіл, тобто $\angle O_1P_1P_2 = \angle O_2P_2P_1 = 90°$ і $O_1P_1 = O_2P_2$, звідки випливає, що $O_1O_2P_2P_1$ – прямокутник, отже $\angle O_1O_2P_2 = 90°$. Тоді $\angle O_1O_2H = 180° - \angle O_1O_2P_2 - \angle P_2O_2C = 45°$. Тому $\triangle O_1O_2H$ теж рівнобедрений прямокутний трикутник з гіпотенузою $O_1O_2 = 2r$. Катет цього трикутника обчислимо, скориставшись теоремою Піфагора: $HO_2 = \sqrt{2}r$.

Отримуємо $h = DC = DH + HO_2 + O_2C = (1 + 2\sqrt{2})r = 10$, звідки $r = \frac{10}{1+2\sqrt{2}}$.

4. Знайдіть рівняння параболи, яка проходить через початок координат і обидві точки перетину парабол $y = x^2 - \frac{3}{2}x - 5$ і $y = -x^2 + \frac{1}{2}x - 1$. Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: $y = -\frac{3}{2}x^2 + x$.

Розв'язок. Знайдемо точки перетину парабол. Їх абсциси задовольняють рівняння

$$x^2 - \tfrac{3}{2}x - 5 = -x^2 + \tfrac{1}{2}x - 1 \ \Leftrightarrow\ 2x^2 - 2x - 4 = 0.$$

Корені цього рівняння – це $x = 2$, $x = -1$. Ординати точок перетину можна знайти, підставивши знайдені абсциси у рівняння будь-якої з даних парабол. Отримуємо, що точки перетину даних парабол – це $(2, -4)$ і $(-1, -\frac{5}{2})$.

Тепер знайдемо параболу, що проходить через початок координат і ці дві точки. Оскільки парабола проходить через початок координат, тобто через точку $(0,0)$, її рівняння має вигляд $y = ax^2 + bx$. Для того, щоб знайти a і b, підставимо в рівняння знайдені точки:

$$-4 = 4a + 2b, \quad -\tfrac{5}{2} = a - b,$$

звідки отримуємо $a = -\frac{3}{2}$, $b = 1$.

5. Василь намалював графік деякої функції $y = f(x)$ на відрізку $x \in [0,1]$, причому з'ясувалося, що графік цілком лежить у смузі між прямими $y = 0$ і $y = 2$. Потім Василь знайшов площу криволінійної трапеції, що обмежується прямими $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ і графіком, що він намалював. Вийшло, що ця площа дорівнює $\frac{3}{2}$. Петрик намалював графік функції $y = 2 + x - f(x)$ на відрізку $x \in [0,1]$ і теж знайшов площу криволінійної трапеції, що обмежується прямими $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ і графіком, що він намалював. Яке число могло вийти у Петрика? Вкажіть усі варіанти. Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: 1.

Розв'язок. Оскільки $f(x) \geqslant 0$, то графік функції, який намалював Василь, розташований над віссю Ox. Отже, площа, яку знайшов Василь, дорівнює інтегралу

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{3}{2}.$$

Оскільки $0 \leqslant f(x) \leqslant 2$ і $0 \leqslant x \leqslant 1$, то $2 + x - f(x) \geqslant 0$. Отже, графік функції, який намалював Петрик, теж розташований над віссю Ox. Отже, площа, яку знайшов Петрик, дорівнює інтегралу

$$\int_0^1 (2 + x - f(x))dx = \underbrace{\int_0^1 (2+x)dx}_{=(2x+\frac{1}{2}x^2)|_0^1=\frac{5}{2}} - \underbrace{\int_0^1 f(x)dx}_{=\frac{3}{2}} = 1.$$

Примітка. Взагалі кажучи, не для будь-якої функції можна знайти площу, про яку йдеться в задачі. Функція має бути *інтегровною за Ріманом*, тобто задовольняти додаткові умови (детальніше можна прочитати у підручнику з математичного аналізу). При цьому інтегровна функція не обов'язково повинна бути неперервною. Але з того, що Василь *зміг* знайти площу своєї трапеції, тобто функція $f(x)$ є інтегровною, випливає, що і функція Петрика інтегровна (як різниця інтегровних функцій), тобто і Петрик зможе знайти площу своєї трапеції.