АНОТАЦІЯ

Заварзіна О. О. Ізометрії та стискання підмножин банахового простору. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – Математика (Галузь знань 11 – Математика та статистика). – Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України, Харків, 2020.

У вступі обґрунтовано вибір теми дисертаційної роботи, сформульовані мета, об'єкт, предмет, завдання та методи дослідження. Надані відомості про наукову новизну і значення отриманих результатів, зв'язок з науковими програмами, планами, темами.

Перший розділ присвячений огляду наукової літератури та історії розвитку питань, що розглядаються в дисертації.

Означення. Метричний простір називається пластичним, якщо кожна нерозтягувальна бієкція цього простору на себе є ізометрією.

Результати дисертації зосереджені навколо наступних питань:

Питання 1. Одиничні кулі яких банахових просторів є пластичними?

Питання 2. Як можна описати пластичні опуклі обмежені замкнені підмножини гільбертового простору?

Проблема Тінглі. Чи можна ізометрію між одиничними сферами двох банахових просторів продовжити до лінійного бієктивного відображення між цими просторами?

Перші два питання вмотивовані результатами та прикладами з [9], [20] і [6]. А саме: пластичністю цілком обмежених метричних просторів та прикладами не цілком обмежених і навіть необмежених пластичних просторів; пластичністю одиничних куль строго опуклих банахових просторів, зокрема гільбертових, та прикладом непластичного еліпсоїда у гільбертовому просторі.

Проблема Тінглі, незважаючи на велику кількість часткових результатів, як то [13] чи [8], є нерозв'язаною навіть у двовимірному випадку. У [23] проблема Тінглі розв'язана для так званих локальних GLспросторів, зокрема, GL-просторів, а також доведено, що c_0-, ℓ_1- і ℓ_∞-суми зберігають клас GL-просторів. У цьому світлі нас зацікавили властивості GL-просторів, зокрема описання GLR-просторів.

Другий розділ присвячений вивченню питання 1, та його природному розширенню.

Питання 3. Для яких пар, взагалі кажучи, різних банахових просторів нерозтягувальна бієкція між їхніми одиничними кулями має бути ізометрією?

Головні результати розділу – теореми 2.9, 2.23, 2.20, 2.28, 2.38 – розв'язують цю проблему для пар просторів (X, Y), де X – довільний банахів простір, а Y – строго опуклий, ℓ_1, скінченновимірний, сума строго опуклих просторів по ℓ_1 та такий простір, одинична сфера якого є об'єднанням усіх своїх скінченновимірних поліедральних крайніх підмножин відповідно. У теоремі 2.10 ця задача розв'язана для довільного простору Y і строго опуклого простору X. Таким чином, відповідь на питання 1 додатково отримана для простору ℓ_1, суми строго опуклих просторів по ℓ_1 та простору, одинична сфера якого є об'єднанням усіх своїх скінченновимірних поліедральних крайніх підмножин.

У **третьому розділі** містяться результати з приводу питання 2. А саме, отриманий критерій лінійної пластичності тілесного еліпсоїда у сепарабельному гільбертовому просторі.

Під еліпсоїдом у гільбертовому просторі ми розуміємо множину вигляду

$$E = \left\{ x = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n e_n \in H : \sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{x_n}{a(n)} \right|^2 \leqslant 1 \right\},$$

де $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ позначає ортонормований базис, а числа $a(n) > 0$ називають півосями E. Ми накладаємо на функцію $a \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ вимоги:

$$\inf_n a(n) > 0,$$

$$\sup_n a(n) < +\infty,$$

що забезпечує непорожність внутрішності і обмеженість E. Позначимо $A = a(\mathbb{N})$ множину півосей E, і для кожного $t \in A$ ми називатимемо його кратністю кількість елементів у множині $a^{-1}(t)$.

Означення. Нехай M – підмножина нормованого простору X. Будемо говорити, що M лінійно пластична, якщо будь-який лінійний оператор $T : X \to X$, чиє обмеження на M є бієктивним нерозтягуючим відображенням з M на M, є ізометрією на M.

Головний результат розділу наступний.

Теорема. Еліпсоїд E є лінійно пластичним тоді і тільки тоді, коли кожна підмножина B множини A півосей E, що складається більш ніж з одного елемента, має принаймні одну з наступних властивостей:

1. B має максимум скінченної кратності;
2. B має мінімум скінченної кратності.

Четвертий розділ присвячений вивченню властивостей GL-просторів.

Означення. Замкненою зрізкою одиничної кулі B_X банахового простору X називається підмножина B_X вигляду

$$\mathcal{S}(x^*, \alpha) = \{x \in B_X : x^*(x) \geqslant 1 - \alpha\},$$

де $x^* \in S_{X^*}$ і $\alpha \in (0, 1)$.

Означення. Банахів простір X називається узагальнено-пишним, або GL-простором, якщо для будь-якого $x \in S_X$ і будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться зрізка $\mathcal{S}(x^*, \varepsilon)$, така що $x \in \mathcal{S}(x^*, \varepsilon)$ і

$$\operatorname{dist}(y, \mathcal{S}(x^*, \varepsilon)) + \operatorname{dist}(-y, \mathcal{S}(x^*, \varepsilon)) < 2 + \varepsilon$$

для всіх $y \in S_X$.

Означення. Гранню одиничної кулі банахового простору X будемо називати непорожню множину вигляду

$$\mathcal{F}(x^*) = \{x \in B_X : x^*(x) = 1\},$$

де $x^* \in S_{X^*}$.

Означення. Підмножину $A \subset B_X$ називатимемо пухкою, якщо для будь-якого $y \in S_X$ знайдуться $a_1, a_2 \in A$, такі що

$$\|y - a_1\| + \|y + a_2\| \leqslant 2.$$

Означення. Нормований простір X називається ультра-GL відносно підпростору $W \subset X^*$ (ультра-GL(W)-простір), якщо для будь-якого $x \in S_X$ знайдеться $x^* \in S_W$, такий що $x \in \mathcal{F}(x^*)$ і $\mathcal{F}(x^*)$ пухка. У випадку, коли $W = X^*$, простір X будемо називати ультра-GL.

Нехай $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_E)$ – нормований простір. Позначимо e_k, $k = 1, \ldots, n$, елементи канонічного базису: координата з номером k вектора e_k дорівнює 1, усі інші – нулю. Норму $\|\cdot\|_E$ будемо називати абсолютною, якщо вона задовольняє наступні умови:

(i) $\|e_k\|_E = 1$, $k = 1, \ldots, n$;

(ii) для будь-якого $a = (a_1, ..., a_n)$ вектор

$$|a| := (|a_1|, ..., |a_n|)$$

має таку ж норму, як a:

$$\|(a_1, ..., a_n)\|_E = \|(|a_1|, ..., |a_n|)\|_E.$$

Нехай $X_1, \ldots, X_n$ – нормовані простори, і $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_E)$ – простір з абсолютною нормою. E-сума просторів X_k (позначимо її $E(X_k)_1^n$) – це векторний простір усіх $x = (x_1, ..., x_n)$, $x_k \in X_k$, $k = 1, \ldots, n$, з нормою

$$\|x\| = (\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|)_E.$$

Означення. Простір $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_E)$ з абсолютною нормою називається GL-зберігаючим (коротко – GLR-простором), якщо для кожного набору $X_1, \ldots, X_n$ GL-просторів відповідна E-сума $E(X_k)_1^n$ є GL-простором.

Означення. Нехай $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_E)$ – простір з абсолютною нормою, $d^* = (d_1, ..., d_n) \in \operatorname{ext}(B_{E^*})$ з $d_k \geqslant 0$. Грань $\mathcal{F}(d^*) \subset S_E$ називається монотонно пухкою якщо, позначивши $D = \{k : d_k \neq 0\}$, для будь-якого $a = (a_1, ..., a_n) \in S_E$ з $a_k \geqslant 0$ і будь-якого $z = (z_1, ..., z_n) \in B_E$ з

$$0 \leqslant z_k \leqslant a_k \text{ для } k \in D$$

знайдеться $b = (b_1, ..., b_n) \in \mathcal{F}(d^*)$, такий що $\|b - z\| = 1 - d^*(z)$ і $b_k \geqslant a_k$ для $k \in D$. Простір E називається GL-монотонним (GLM-простором), якщо для будь-якого $d^* \in \text{ext}(B_{E^*})$ з $d_k \geqslant 0$ відповідна грань $\mathcal{F}(d^*) \subset S_E$ є монотонно пухкою.

У розділі детально розглядається взаємодія наведених вище понять. Головними результатами розділу є наступні теореми та наслідок.

Теорема. Одинична куля будь-якого скінченновимірного GL-простору є багатогранником з пухкими максимальними гранями.

Теорема. Простір $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_E)$ з абсолютною нормою є GL-зберігаючим тоді і тільки тоді, коли він GL-монотонний.

Теорема. Нехай X – банахів простір, і $\mathfrak{U}$ – нетривіальний ультрафільтр на $\mathbb{N}$. Тоді наступні твердження еквівалентні:

(I) X – GL-простір,

(II) $X^{\mathfrak{U}}$ – ультра-GL відносно підпростору $W = (X^*)^{\mathfrak{U}}$.

Теорема. Нехай X – дійсний двовимірний GL-простір. Тоді X ізометричний або простору, чия одинична куля є шестикутником з одиничними ребрами, або $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\ell_1})$.

Наслідок. Єдиними двовимірними GLR-просторами є ℓ_1^2 і ℓ_∞^2.

Ключові слова: нерозтягувальне відображення, одинична куля, пластичний простір, строго опуклий простір, еліпсоїд, лінійно-пластичний простір, проблема Тінглі, властивість Мазура-Улама, поліедральний простір, GL-простір, ультрадобуток.