

**Всеукраїнська олімпіада
Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна
з математики, дистанційний тур**

Олімпіада з математики проводиться для вступу в Харківській національний університет імені В.Н.Каразіна на навчання за спеціальністю 111 «Математика».

Перший (дистанційний) тур олімпіади триває з 14 березня 2017 року по 07 квітня 2017 року.

Попередні результати першого туру будуть оприлюднені 10 квітня 2017 року, а остаточні – 18 квітня 2017 року.

За результатами дистанційного туру учасники, які набрали не менше 75% балів, будуть запрошені на другий (очний) тур. Очний тур відбудеться в Харківському національному університеті імені В.Н.Каразіна 23 квітня 2017 року об 11.00 годині.

Учасникам другого туру, які наберуть не менше ніж 90% балів на другому етапі, нараховуються 20 додаткових балів до одного з предметів сертифіката зовнішнього незалежного оцінювання при розрахунку конкурсного бала в Університеті.

Інструкція з виконання

Дистанційний тур складається з 8 задач. Повний розв'язок кожної задачі оцінюється в 7 балів. Неповні розв'язки також будуть оцінені (в залежності від ступеня просунення).

Будь ласка, розв'яжіть задачі й запишіть розв'язки на аркушах паперу. Напишіть на кожному аркуші Ваші ім'я і прізвище. Якщо Ви отримали лише частковий розв'язок або маєте якісь міркування, напишіть їх теж; є шанси, що вони також буде оцінені. Будь ласка, намагайтеся писати акуратно і розбірливо: нам буде легше оцінити Вашу роботу. Потім відскануйте або сфотографуйте всі аркуші. **Обов'язково** перевірте якість отриманих файлів.

Надішліть файли з Вашою роботою електронною поштою на адресу math@karazin.ua **не пізніше 07 квітня 2017 року**. У листі вкажіть таку інформацію про себе:

- Прізвище,
- Ім'я,
- По батькові,
- Контактний телефон,
- Якщо Ви ще навчаєтесь у школі: повна назва Вашого навчального закладу і клас; якщо Ви вже закінчили школу: повна назва навчального закладу та рік закінчення.

Коли ми отримаємо Вашого листа і перевіримо, що всі вкладення відкриваються і добре читаються, ми підтвердимо отримання розв'язків відповіддю на Вашу електронну адресу. У разі виникнення проблем з файлами ми повідомимо про них також на Вашу електронну адресу.

Бажаємо успіхів!

Всеукраїнська олімпіада
Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна
з математики, дистанційний тур
Завдання

1. Знайдіть точки перетину параболи $y = x(3 - x) + 7$ і прямої $y = 2 - x$. Відповідь обґрунтуйте.
2. Відомо, що $\cos x = \frac{7}{25}$ та $x \in [\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$. Знайдіть $\sin 2x$. Відповідь обґрунтуйте.
3. Розв'яжіть рівняння $\log_x 7 + \log_7 x = 4$.
4. Водний розчин солі з концентрацією $a\%$ містить 120 г води. Якщо до розчину додати ще 10 г солі, його концентрація дорівнюватиме $(a + 5)\%$. Скільки грамів солі містить розчин? Відповідь обґрунтуйте.

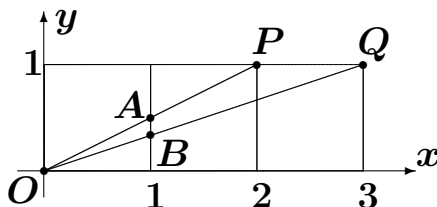
5. Нехай

$$f(x) = \sin \frac{x}{3}, \quad g(x) = (f(x))^3.$$

Доведіть, що для будь-яких дійсних значень x виконується рівність

$$(g(x))^2 + (g'(x))^2 = (f(x))^4.$$

6. Три квадрати (кожний зі стороною 1) розташовані один поряд з одним у першому квадранті та проведено прямі OP та OQ , як показано на рисунку. Знайдіть довжину відрізка AB . Відповідь обґрунтуйте.



7. Знайдіть найбільший член послідовності

$$x_n = \frac{n}{n^2 + 2017}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Відповідь обґрунтуйте.

8. Функція задається формулою:

$$f(x) = \begin{cases} 4, & \text{якщо } x < -4, \\ -x, & \text{якщо } -4 \leq x \leq 5, \\ -5, & \text{якщо } x > 5. \end{cases}$$

Намалюйте графік функції $g(x) = \sqrt{25 - (f(x))^2}$.